

# Quatrième partie:

## Forces, travail et énergie

### Notions abordées:

- 4.1 Différent types de forces
- 4.2 Impulsion et quantité de mouvement
- 4.3 Travail d'une force et théorème de l'énergie cinétique
- 4.4 Forces conservatives et énergie potentielle
- 4.5 Théorème de l'énergie
- 4.6 Equilibre et petites oscillations

### Buts:

- Comprendre les notions de force conservative et d'énergie potentielle
- Maîtriser ces nouvelles notions permettant une résolution des problèmes plus rapide en certain cas

# 4.1 Types de forces

Force de pesanteur (poids):  $\vec{F} = m\vec{g}$  avec  $\vec{g}$  l'accélération de gravité terrestre

Force de rappel:  $\vec{F} = -k\vec{x}$  (loi de Hooke)

Force de liaison: force perpendiculaire au support forcent le point matériel à rester sur le support

Force de Lorentz:  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$  force exercée par un champ électromagnétique sur une particule de charge  $q$  se déplaçant avec vitesse  $\vec{v}$

Gravitation entre deux masses:  $\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$  avec  $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  la constante de gravitation universelle

# 4.1 Forces de frottement (ou friction)

- Forces exercées sur un corps par:
  - le fluide (gaz ou liquide) dans lequel il se déplace
  - tout autre corps avec lequel il est en contact et par rapport auquel il se déplace

- Ces forces s'opposent au mouvement du corps:

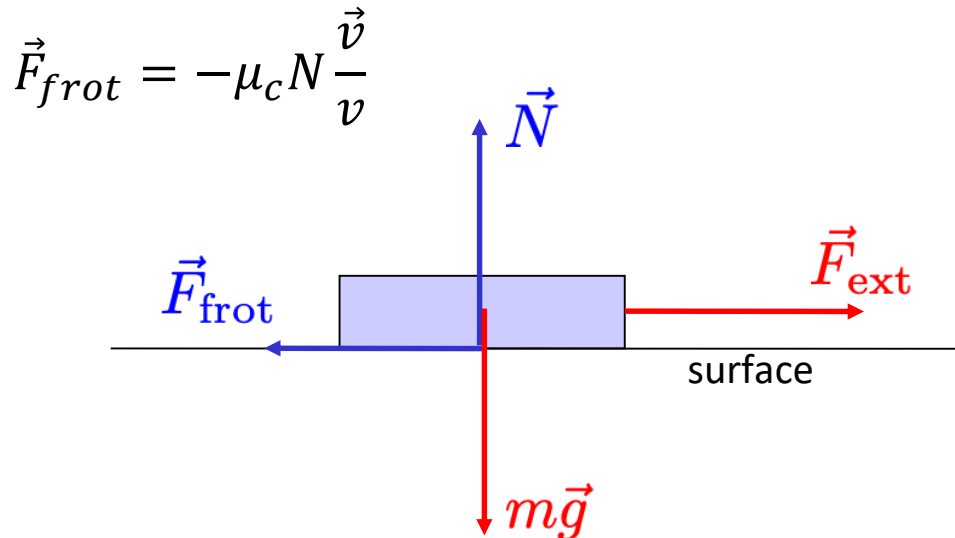
$$\vec{F}_{\text{frot}} = -f(v)\hat{v}, \quad f(v) > 0$$

- Elles résultent d'un grand nombre de phénomènes microscopiques modélisés par un effet moyen:
  - Exemple: frottement de l'air sur un avion
    - A priori on devrait pouvoir décrire cette situation comme une succession d'un grand nombre de « chocs » entre l'avion et les molécules d'air ...
    - ... mais ceci supposerait qu'on puisse déterminer les trajectoires de toutes les molécules d'air, ce qui est irréaliste
  - Exemple: multitude de points des contacts entre deux surfaces
- On décrit donc les forces de frottement par des lois empiriques:
  - Tirées de l'expérience
  - Non fondamentales
  - Approximatives et dont l'applicabilité dépend des cas

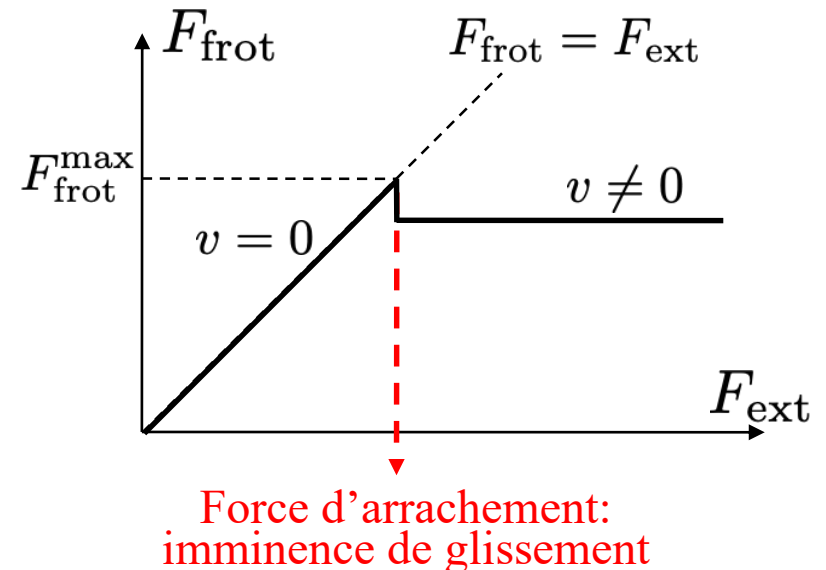
# 4.1 Forces de frottement sec

[démonstration: mesure force de frottement 69](#)

- Force de contact  $\vec{F}$  exercée par une surface sur un solide :
  - composante normale à la surface  $N$  = force de liaison
  - composante tangente à la surface  $F_{\text{frot}}$  = force de frottement sec



$$\vec{F}_{\text{frot}} = -\mu_c N \frac{\vec{v}}{v}$$



- Il faut distinguer deux cas:

**Lois de Coulomb**

$$\text{Si } v = 0 : \vec{F}_{\text{frot}} \leq F_{\text{frot}}^{\text{max}} = \mu_s N$$

$$\text{Si } v \neq 0 : \vec{F}_{\text{frot}} = -\mu_c N \frac{\vec{v}}{v}$$

$\mu_s$  = coefficient de frottement statique

$\mu_c$  = coefficient de frottement cinétique

# 4.1 Coefficients de frottement

Exemples (valeurs indicatives)

En règle générale :

$$\mu_c < \mu_s$$

Corps en contact	$\mu_s$	$\mu_c$
Acier sur acier (sec)	0.78	0.42
Acier sur acier (gras)	0.10	0.05
Acier sur acier (surfaces polies)	100	100
Bois sur bois	0.5	0.3
Métal sur glace	0.03	0.01
Pneu sur route sèche	0.8	0.6
Pneu sur route mouillée	0.15	0.1
Téflon sur téflon	0.04	0.04
Cuir sur fonte	0.28	0.56

# 4.1 Forces de frottement sec

- Ne dépendent pas (en première approximation):

- de la vitesse
- de la dimension de la surface de contact

Surface pas parfaitement plane

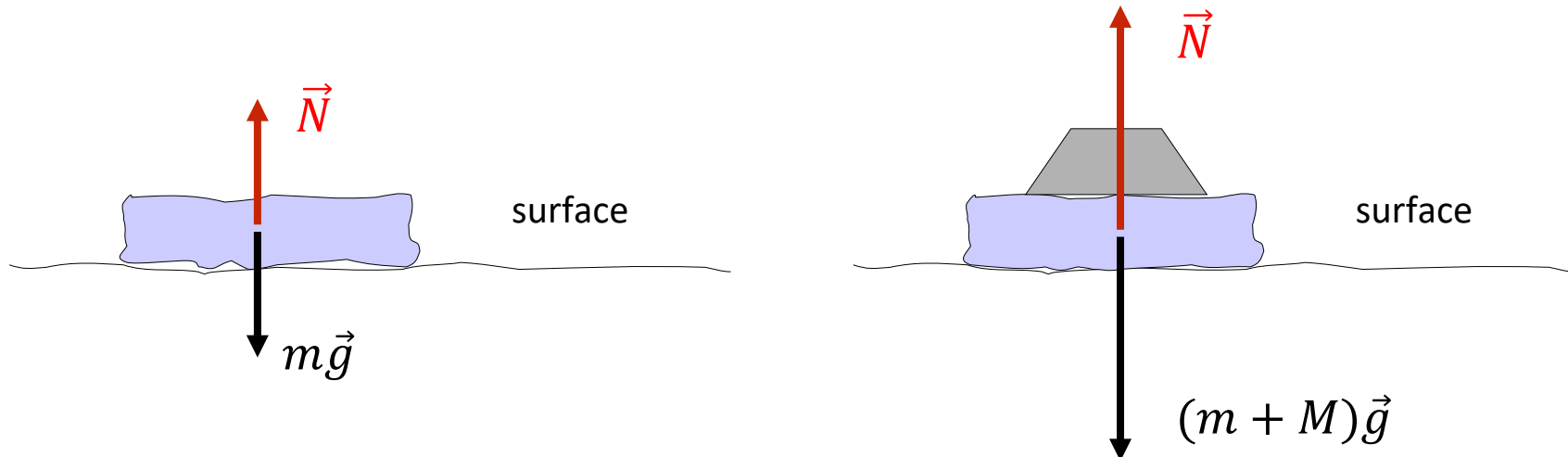
Vrai surface de contact proportionnelle à la charge



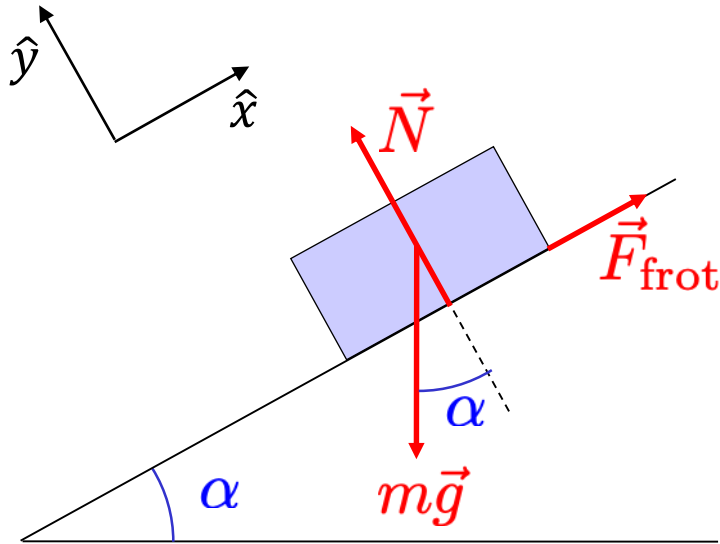
Forces de frottements  
proportionnelles à la  
force de liaison  $N$

- Dependent:

- Nature de corps en contact
- Etat des surfaces
- Temperature



# 4.1 Ex.: solide sur plan incliné



- Cas statique:

$$\vec{N} + \vec{F}_{\text{frot}} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$\alpha_s =$  angle  $\alpha$  tel que  $F_{\text{frot}} = F_{\text{frot}}^{\text{max}} = \mu_s N$   
(début glissement)

$$\begin{cases} \hat{x}: & \mu_s N = mg \sin \alpha_s \\ \hat{y}: & N = mg \cos \alpha_s \end{cases} \Rightarrow \mu_s = \tan \alpha_s$$

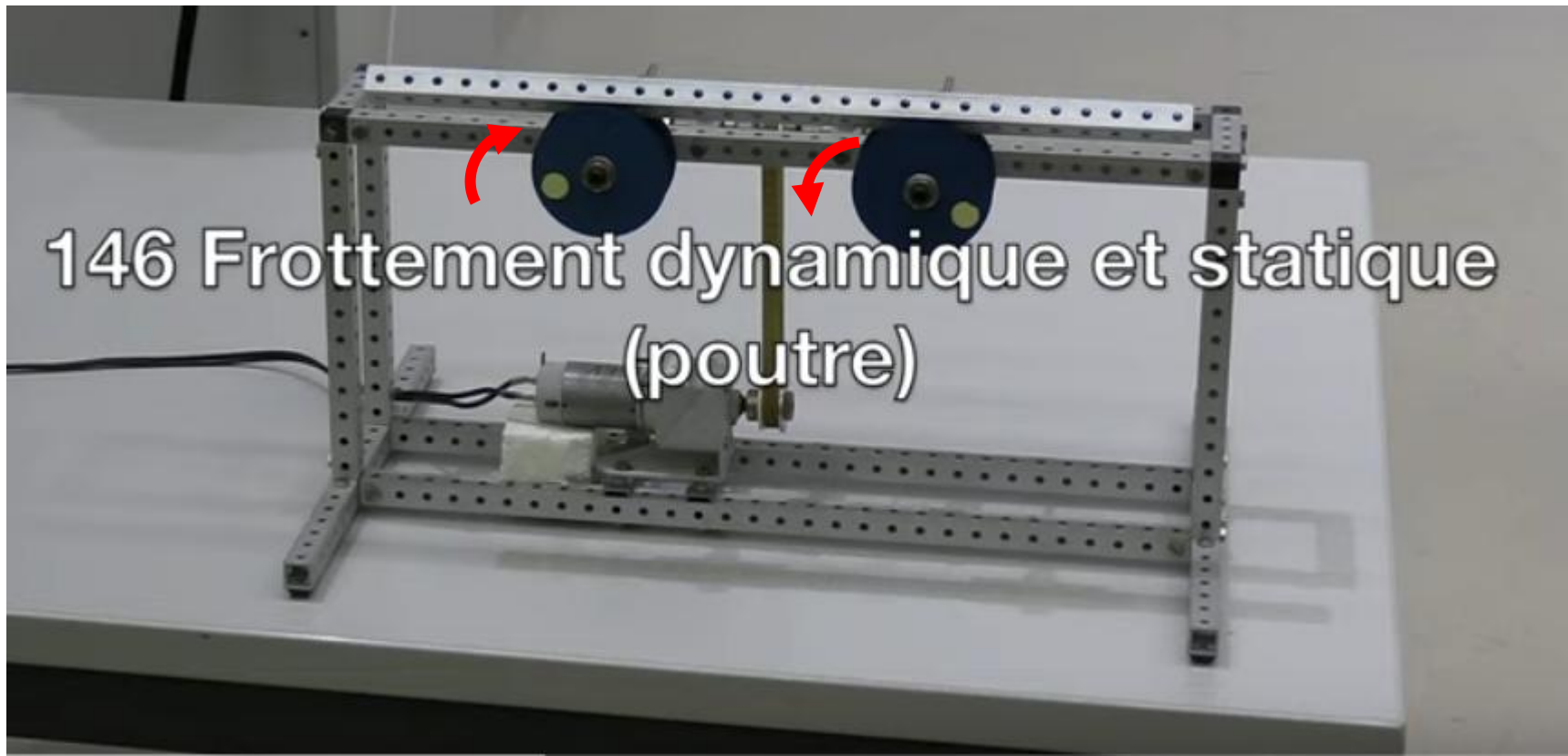
- Cas dynamique (glissement):

$\alpha_c =$  angle  $\alpha$  tel que  $\vec{v} =$  constante

$$\mu_c = \tan \alpha_c$$

Une fois commencée à glisser, la masse  $m$   
continue le mouvement même si  $\alpha_c < \alpha_s$

## 4.1 Coefficients de frottement

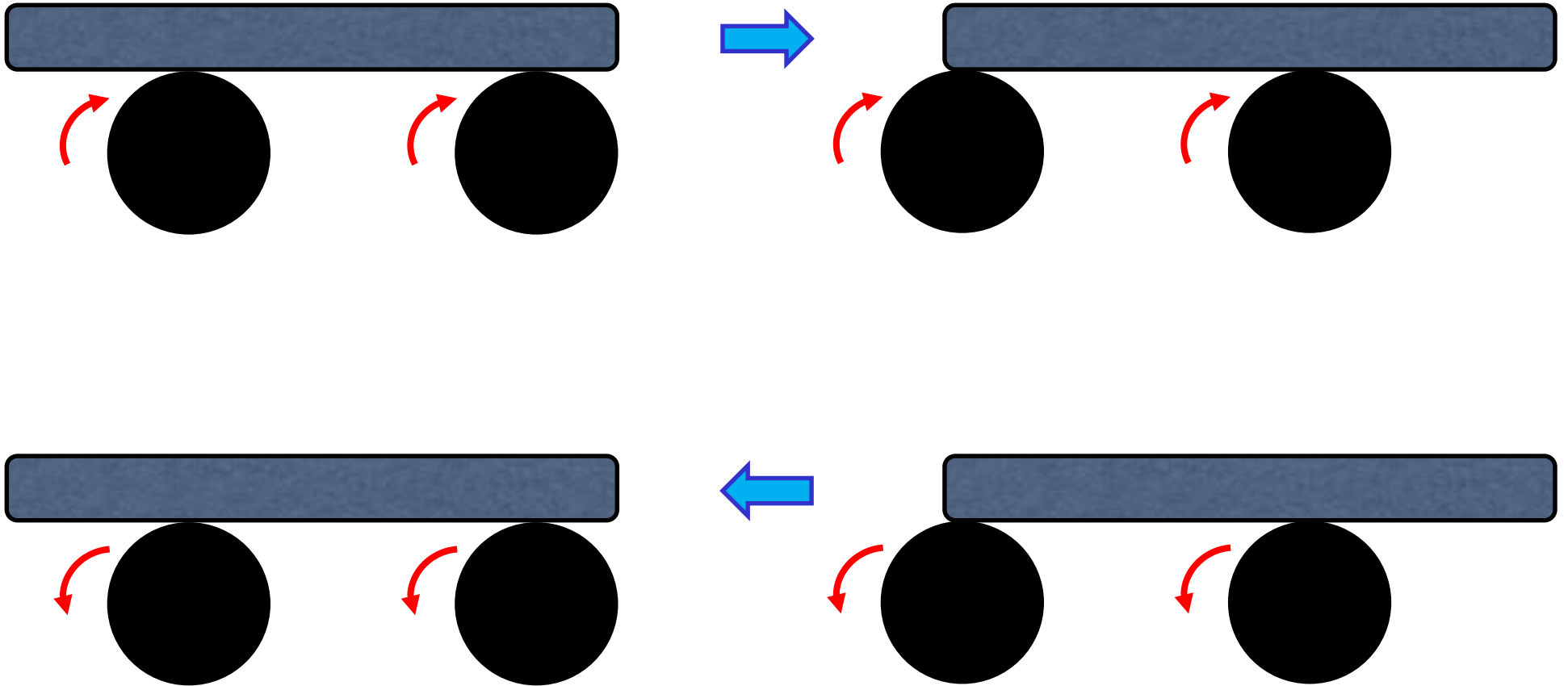


On pose une barre, avec son centre décalé vers la droite, sur les deux roues quand elles tournent dans le sens opposé (comme en figure), que se passe-t-il?

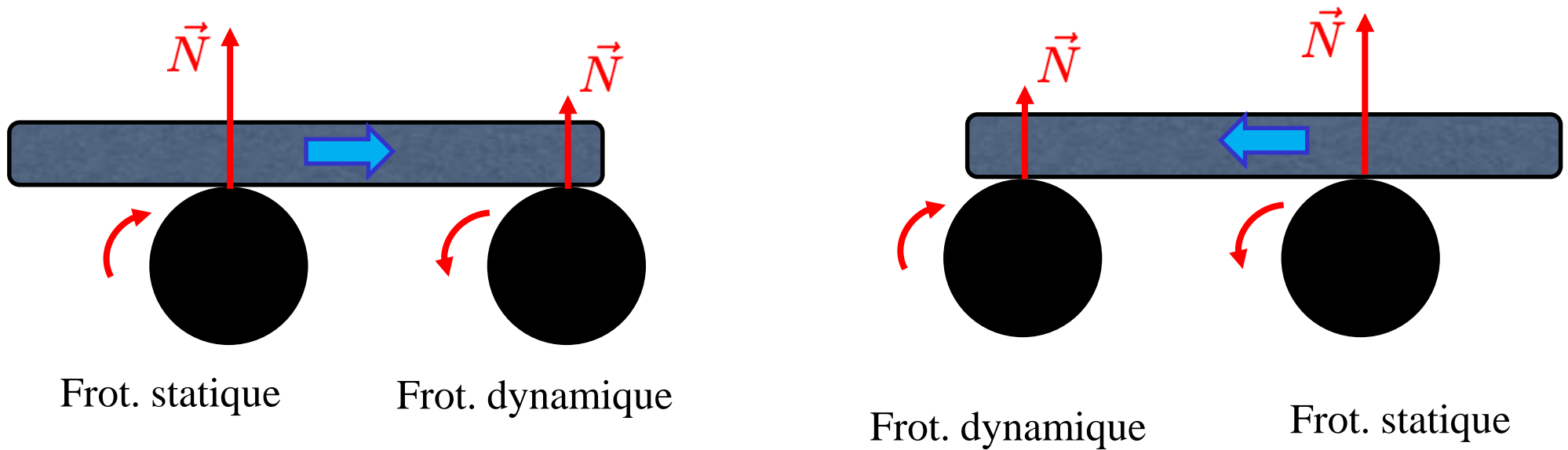
- 1) La barre tombe a gauche
- 2) La barre tombe a droite
- 3) La barre oscille avant et arrière

## 4.1 ex. frottement statique

Frottement statique (roulement sans glissement) aux 2 points de contact entre poutre et roues



## 4.1 frottement statique et dynamique



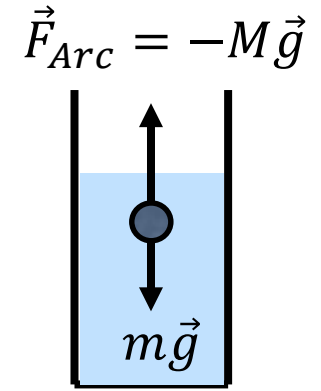
Frottement statique pour le point de contact qui supporte la majorité du poids de la barre

Frottement dynamique pour le point de contact qui supporte une petite portion de la barre

Si la barre se trouve **exactement** entre les deux disques, alors celle-ci subira des forces de frottements dynamiques de la part de chacun des disques, elle restera alors immobile (mais ceci est un équilibre instable).

# 4.1 Forces exercées par un fluide

Poussée d'Archimède  $\vec{F}_{Arc}$  : un corps plongé dans un fluide est soumis de la part du fluide à une force opposée à celle à laquelle serait soumis un objet de même volume rempli de fluide



M est la masse du fluide déplacé

Si la densité de l'objet est inférieure à la densité du fluide, l'objet flotte ( $Mg > mg$ )

Frottement dans un fluide :

- Régime laminaire (vitesse pas trop grande)  $\vec{F}_{frot} = -b_l \vec{v}$
- Régime turbulent (vitesse grande)  $\vec{F}_{frot} = -b_t v^2 \frac{\vec{v}}{v}$

# 4.2 Impulsion et quantité de mouvement

- Point matériel de masse  $m$  (constante) soumis à la force  $\vec{F}$  entre les points ① et ②

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

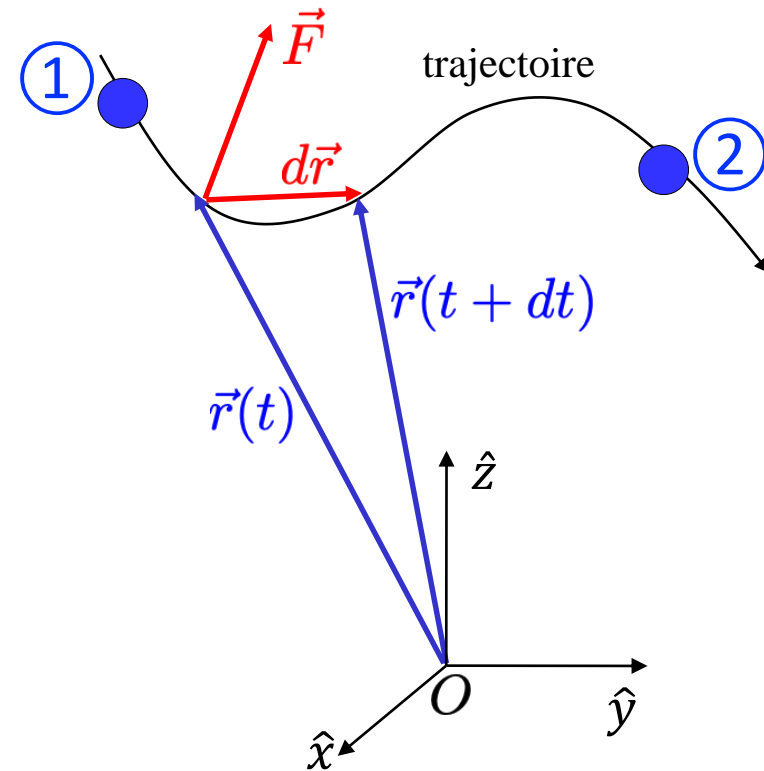
où on définit  $\vec{p} = m \vec{v}$  **Quantité de mouvement**  
Unité de mesure: kg m/s

- Intégration de  $\vec{F} = m \vec{a}$  par rapport au temps:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_1^2 d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

- Définition:

$$d\vec{I} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$



**Impulsion de la force  $\vec{F}$**   
(entre les temps  $t_1$  et  $t_2$ )

$$\vec{F} dt = d\vec{p}$$

2ème loi de Newton (équivalente à  $\vec{F} = m \vec{a}$ )  
**La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la somme des forces**

## 4.2 Ex.: balle de tennis

Jannik Sinner fait un service a 216 km/h. Depuis quelle hauteur je devrais laisser tomber la balle de tennis pour que l'impulsion exercée par la force de pesanteur pendant la chute soit identique à l'impulsion imprimé par Jannik avec la raquette de tennis?

On indique avec  $v_0=216 \text{ km/h} = 60 \text{ m/s}$  la vitesse de la balle de tennis (initialement à repos) à l'instant où la balle parte de la raquette de tennis.

On ne connaît ni la force appliquée par Jannik ni le temps de frappe

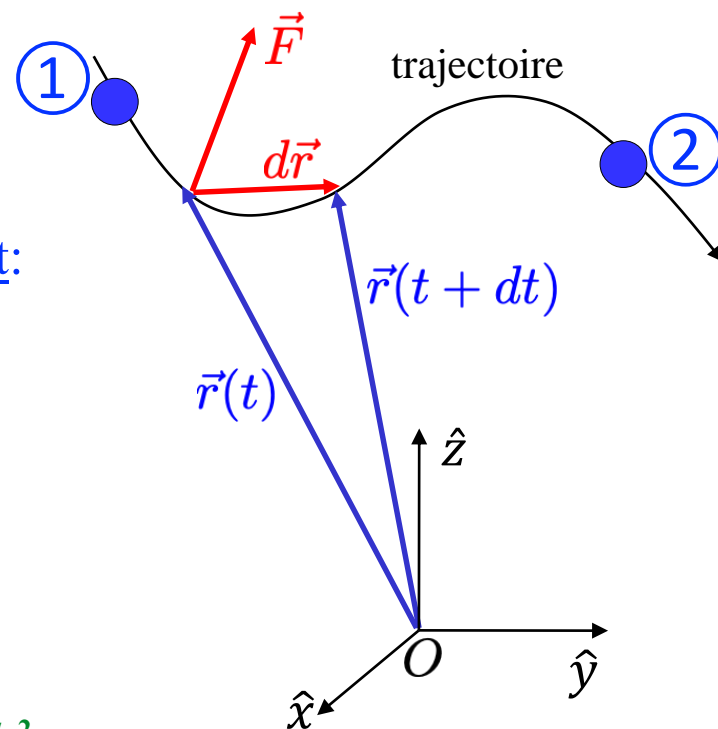
$$\vec{I}_{raquette} = \int_0^{\Delta t_{frappe}} \vec{F} dt = \vec{p}_{frappe} - \vec{p}_0 = mv_0 - 0 = mv_0$$

$$\vec{I}_{mg} = \int_0^{t_{chute}} m\vec{g} dt = mgt_{chute} = \vec{p}_{chute} - \vec{p}_0 = mv_0 \quad \Rightarrow \quad t_{chute} = \frac{v_0}{g}$$

$$h_{chute} = \frac{1}{2}gt_{chute}^2 = \frac{1}{2}g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g} \approx 180 \text{ m}$$

# 4.3 Travail et énergie cinétique

- Point matériel de masse  $m$  (constante) soumis à la force  $\vec{F}$  entre les points ① et ②



- Intégration de  $\vec{F} = m \vec{a}$  par rapport au vecteur déplacement:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) dt = K_2 - K_1$$

où on définit  $K = \frac{1}{2} m v^2$

**Energie cinétique**  
Unité de mesure: J (Joule) = kg m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>

- Définition:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

**Travail de la force  $\vec{F}$**   
Unité de mesure: J (joule) = Nm = kg m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>

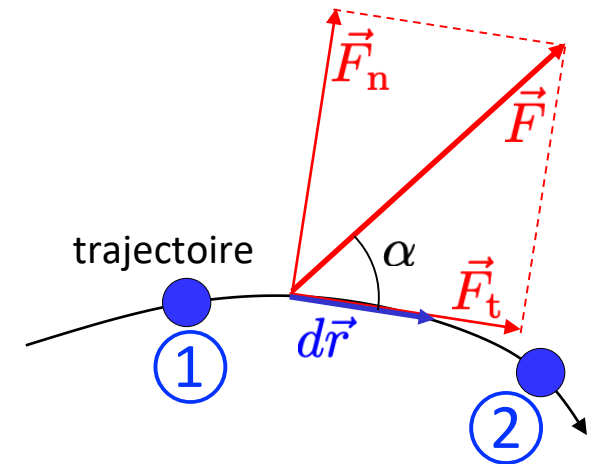
$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

***Théorème de l'énergie cinétique:***  
**La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces**

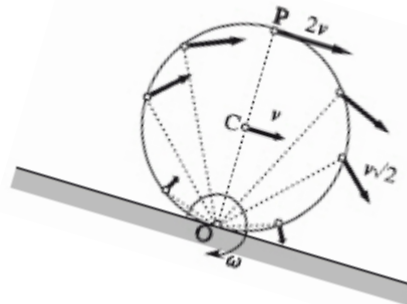
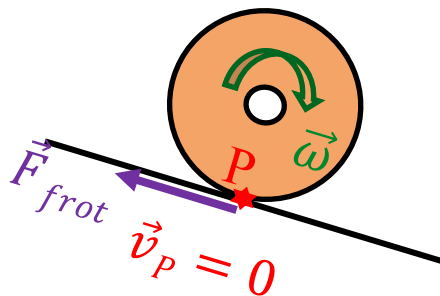
# 4.3 Travail: interpretation

$$W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha ds = \int_1^2 F_t ds$$

$\int_1^2 \dots$  = intégrale curviligne le long de la trajectoire  
 $s$  = abscisse curviligne le long de la trajectoire  
 $ds = |d\vec{r}|$



- Seule la composante de  $\vec{F}$  tangente à la trajectoire ( $\vec{F}_t$ ) travaille
  - la force centripète du mouvement circulaire uniforme ne travaille pas (vitesse constante),
  - les forces de liaison (perpendiculaires au déplacement) ne travaillent pas
- Le travail  $W$  a le signe de la projection de  $\vec{F}$  sur la direction de mouvement:
  - le travail d'une force de frottement sec vaut  $W_{12} = -\mu_c N(s_2 - s_1) < 0$
- Une force dont le point d'application est immobile ne travaille pas:
  - force de frottement sur un cylindre roulant sans glisser



A chaque instant, il y a une rotation autour du point de contact, qui est immobile ( $ds = 0, v_P = 0$ ).

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{v} dt = 0$$

## 4.3 Puissance d'une force

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

**Puissance instantanée d'une force**

Unité de mesure: W (Watt) = J/s = kg m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>

$$K_2 - K_1 = W_{12} \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

**Le taux de variation de l'énergie cinétique est égale à la puissance de la somme des forces**

## 4.4 Forces conservatives

- Une force  $\vec{F}(\vec{r})$  est dite **conservative** si son travail entre deux points **ne dépend pas du chemin suivi** (mais uniquement de la position des deux points)

- Une telle force  $\vec{F}(\vec{r})$  dérive d'une énergie potentielle  $V(\vec{r})$  tel que: 
$$\vec{F}(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$
 
$$\vec{\nabla} \text{ est le gradient}$$
 
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

- Dans ce cas, on a: 
$$df(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \vec{\nabla}f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$
 La variation infinitésimale de  $f(\vec{r})$  est:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 - \begin{pmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial z \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 dV(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = K_2 - K_1$$

donc:  $V(\vec{r}_1) + K_1 = V(\vec{r}_2) + K_2$

*Théorème de l'énergie mécanique:*

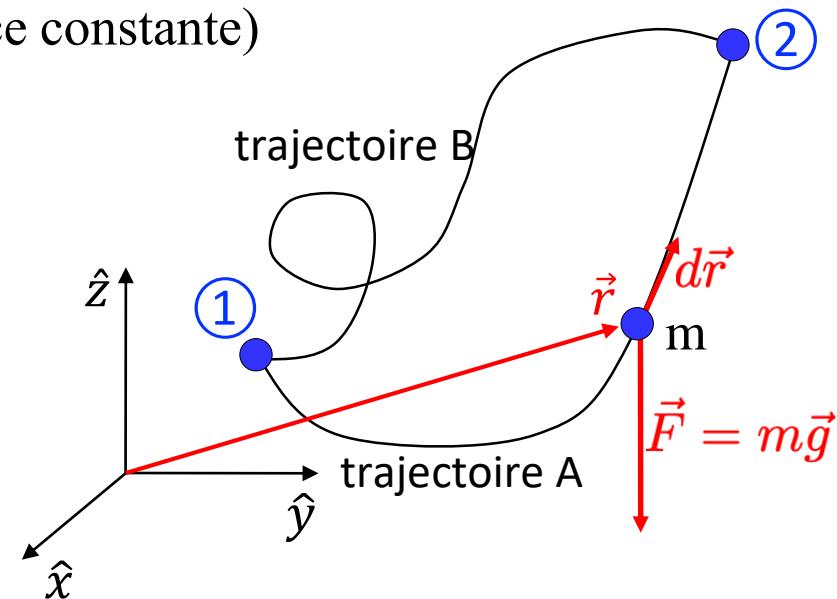
**Pour des forces conservatives, l'énergie mécanique  $E$  (énergie cinétique + énergie potentielle) est conservée**

$$E = K + V(\vec{r}) = \text{constante}$$

## 4.4 Ex.: travail de la force de pesanteur

(ou, plus généralement, d'une force constante)

$$\begin{aligned}W_{12} &= \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -mg\vec{e}_z \cdot d\vec{r} \\ &= \int_1^2 -mg dz = -mg z \Big|_1^2 = mgz_1 - mgz_2\end{aligned}$$



- Le travail ne dépend que des coordonnées  $z_1$  et  $z_2$  des points ① et ② ; il ne dépend pas de la trajectoire suivie entre ces deux points
- Le travail de la force de pesanteur est nul le long d'une trajectoire fermée quelconque:

$$W_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{r} + \int_2^1 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg(z_1 - z_2) + mg(z_2 - z_1) = 0$$

- On écrit:  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

# 4.4 Ex.: chute d'un point matériel initialement au repos

$$\vec{F} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

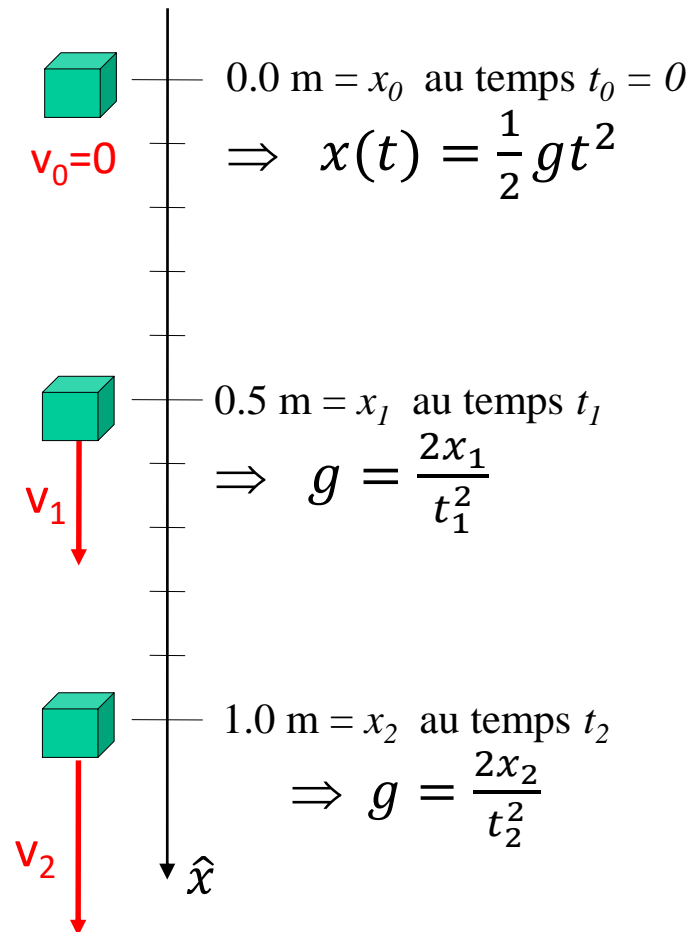
$$mg\vec{e}_x = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} mg \frac{\partial(x_0 - x)}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\vec{r}) = mg(x_0 - x)$$

Conservation énergie mécanique:  $V(x_0) + K_0 = V(x_2) + K_2$

$t = 0$ :

$$\begin{aligned} V(x_0) = mg(x_0 - x_0) = 0 \\ K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\Downarrow \\ 0 = -mgx_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \end{aligned}$$

$$mgx_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(gt_2)^2 \Rightarrow g = \frac{2x_2}{t_2^2}$$



On retrouve l'expression pour  $g$  sans utiliser la 2<sup>ème</sup> loi de Newton

## 4.4 ex. Force de pesanteur

### Quiz



A partir de la même hauteur, deux balles identiques sont laissées libres de rouler sur deux pentes de différentes inclinaisons.

Dans les deux cas, la dernière partie de la pente est horizontale.

La quelle des deux balles tombe plus loin dans le bac (on néglige les frottements)?

- 1) La verte
- 2) La rouge
- 3) Identique

## 4.4 ex. Force de pesanteur

### Quiz



A partir de la même hauteur, deux balles identiques sont laissées libres de rouler sur deux pentes de différentes inclinaisons. Dans les deux cas, la dernière partie de la pente est horizontale. La quelle des deux balles tombe plus loin dans le bac (on néglige les frottements)?

- 1) La verte
- 2) La rouge
- 3) Identique

Les deux balles partent à la même hauteur donc elles ont la même énergie potentielle à  $t = 0$ :  $V(z) = mgz$

Les deux balles sont aussi à la même hauteur quand elles partent de la table, donc la variation de énergie potentielle est identique.

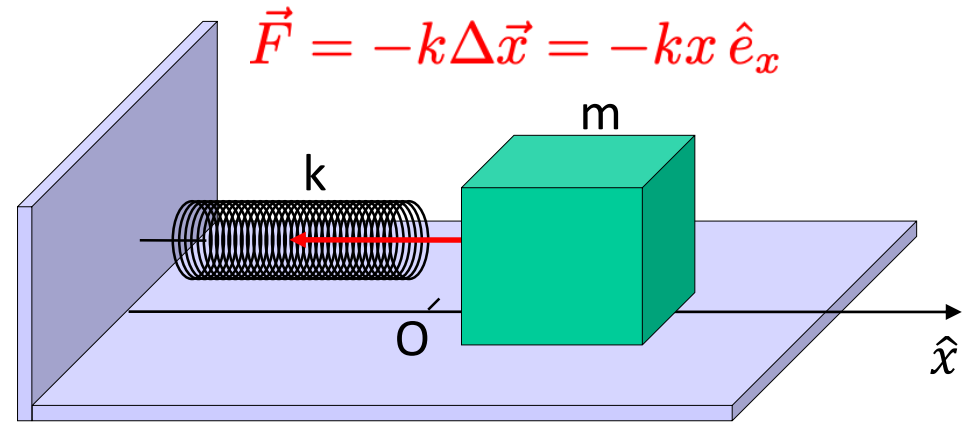
Par le théorème de l'énergie mécanique les deux balles partent de la table avec la même vitesse et donc elles vont tomber au sol à la même distance de la table

## 4.4 Ex.: Travail de la force de rappel d'un ressort

$$W_{0x} = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^x -kx \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^x = -\frac{1}{2} kx^2$$

$$W_{0x} = V(0) - V(x) \Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$



Origine O correspond à la longueur à repos du ressort

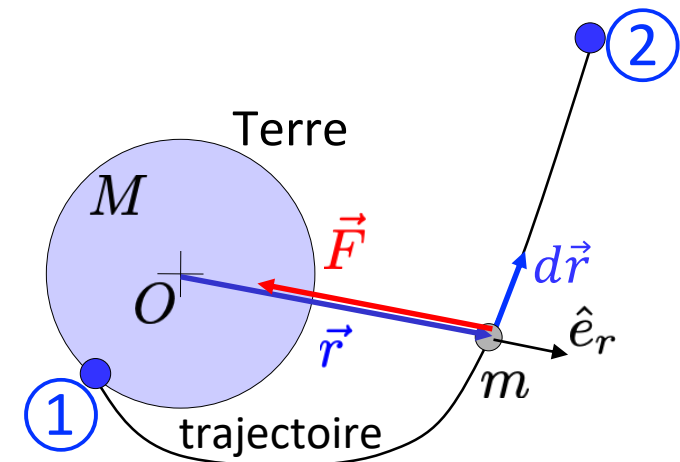
## 4.4 Ex.: Travail de force centrale proportionnelle à $1/r^2$

(par ex.: force de gravitation.  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$  est la constante universelle de gravitation)

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_1^2 -\frac{GmM}{r^2} dr = -\left(-\frac{GmM}{r}\right) \Big|_1^2 = -\frac{GmM}{r_1} + \frac{GmM}{r_2}$$

$$W_{rr\infty} = V(r) - V(r_\infty) \Leftrightarrow V(r) = -\frac{GmM}{r}$$



$$d\vec{r} = dr\hat{e}_r + d\theta\hat{e}_\theta + d\phi\hat{e}_\phi \quad 22$$

## 4.4 Energie potentielle

- L'énergie potentielle est définie à une constante arbitraire près
- Elle représente le travail que la force doit fournir pour amener le point matériel (avec vitesse nulle) à une position de référence arbitraire  $\vec{r}_0$  ( où  $V(\vec{r}_0) = 0$  par définition):

$$\int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}) = -V(\vec{r})$$

### Exemple de force :

Ressort :  $\vec{F} = -kx\hat{e}_x$

Pesanteur :  $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_z$

Gravitation :  $\vec{F} = -(GMm/r^2)\hat{e}_r$

Centrale :  $\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$

Frottement :  $\vec{F} = -f(v)\hat{v}$

### Energie potentielle associée :

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

$$V = mgz + C$$

$$V = -GMm/r + C$$

$$V = -\int_0^r F(r')dr' + C$$

aucune (force non conservative)

## 4.4 Forces conservatives

- Force conservative:

- force  $\vec{F}$  dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée (quels que soient ces points), et non de la trajectoire entre les deux

- Propriétés:

La force  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  est conservative



Il existe une fonction  $V(\vec{r})$  (énergie potentielle) telle que  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \text{ courbe fermée}$$



Il existe une fonction  $V(\vec{r})$  telle que

$$\int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}) = -V(\vec{r})$$



Le champ de force  $\vec{F}(\vec{r})$  est irrotationnel  $\Leftrightarrow$   
 $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r}) = 0, \forall \vec{r}$

Notations d'analyse vectorielle :

Operateur  
Nabla:  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$

Gradient :  $\overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r}) = \vec{\nabla} V(\vec{r})$

Rotationnel :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r})$

# 4.5 Théorème de l'énergie

- Point matériel soumis à:

- des forces conservatives  $\vec{F}^C = \sum_k \vec{F}_k = \sum_k -\vec{\nabla}V_k(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$
- des forces non conservatives de résultante  $\vec{F}^{NC} = \sum_k \vec{F}_k^{NC}$

- Travail des forces

$$W_{12} = \int_1^2 (\vec{F}^C + \vec{F}^{NC}) \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) + \int_1^2 \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) + \int_1^2 \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$
$$W_{12} = \int_1^2 (\vec{F}^C + \vec{F}^{NC}) \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

- Entre les points 1 et 2, on a:  $W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1 - V(\vec{r}_1) + V(\vec{r}_2) = E_2 - E_1$

$$W_{12}^{NC} = E_2 - E_1$$

*Théorème de l'énergie*  
**La variation de l'énergie mécanique est égale  
au travail des forces non-conservatives**

- si toutes les forces sont conservatives:

$$E = \text{constante}$$

**Conservation de  
l'énergie mécanique**

# 4.5 Ex.: Lugeur

- Un lugeur part au repos au point 1 : quelle est sa vitesse au point 2?
- Point de départ 1 :  $z_1 = h_0, v_1 = 0$

$$E_1 = mgz_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_0$$

- Point d'arrivée 2 :  $z_2 = 0, v_2 = ?$

$$E_2 = mgz_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

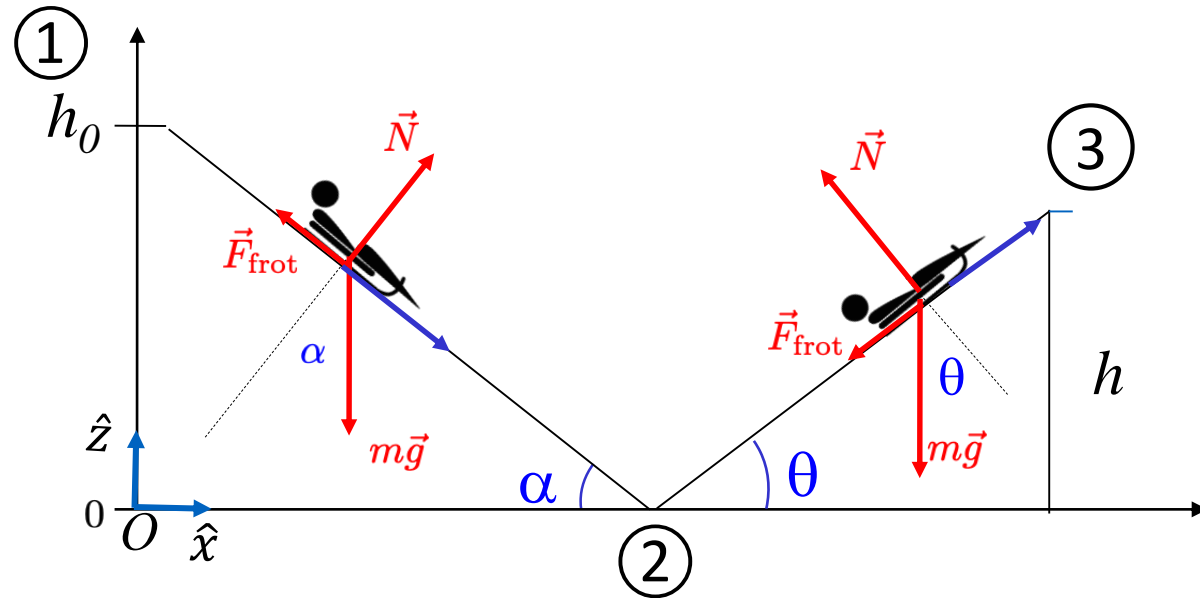
- Théorème de l'énergie :

$$E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}_{frot} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\vec{F}_{frot} ds = -mg\mu_c \cos \alpha \frac{h_0}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mgh_0 = -mg\mu_c \cos \alpha \frac{h_0}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{1}{2}v_2^2 = gh_0 - g\mu_c \frac{h_0}{\tan \alpha}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_0 \left(1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha}\right)}$$

- Pente suffisante pour luger si :  $1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha} > 0 \Rightarrow \tan \alpha > \mu_c$



# 4.5 Ex.: Lugeur

- Après avoir dépassé le point 2, le lugeur remonte la pente d'en face: quelle est la hauteur qu'il atteint?

- Point de départ 1 :  $z_1 = h_0, v_1 = 0$

$$E_1 = mgz_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_0$$

- Point d'arrivée 3 :  $z_2 = h?, v_3 = 0$

$$E_3 = mgz_3 + \frac{1}{2}mv_3^2 = mgh$$

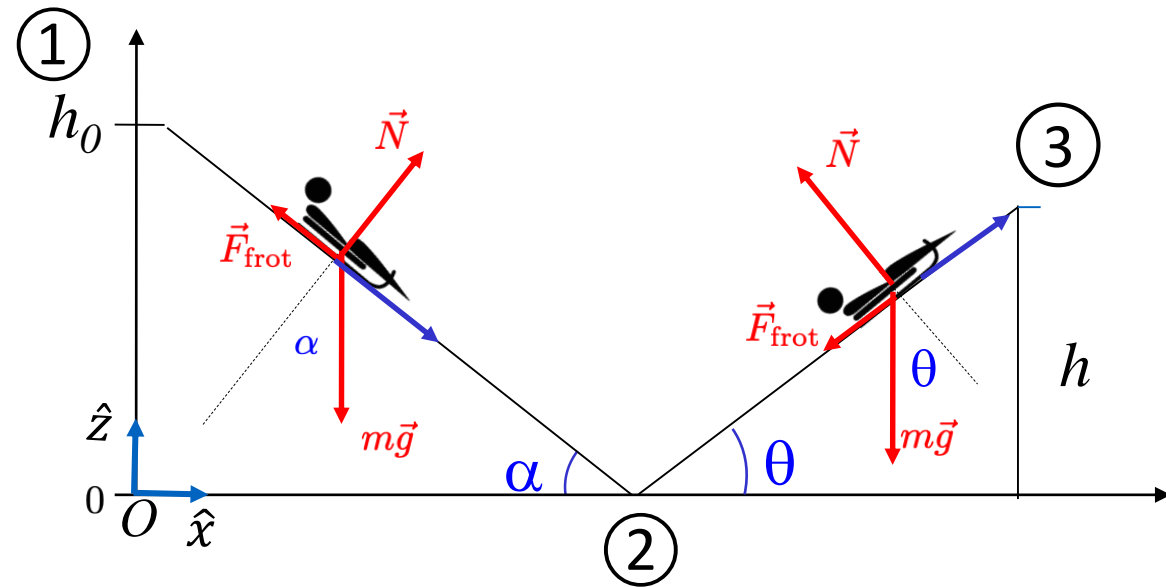
- Théorème de l'énergie :

$$E_3 - E_1 = W_{13}^{NC} = \int_1^3 \vec{F}_{frot} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\vec{F}_{frot} ds + \int_2^3 -\vec{F}_{frot} ds = -mg\mu_c \cos \alpha \frac{h_0}{\sin \alpha} - mg\mu_c \cos \theta \frac{h}{\sin \theta}$$

$$mgh - mgh_0 = -mg\mu_c \cos \alpha \frac{h_0}{\sin \alpha} - mg\mu_c \cos \theta \frac{h}{\sin \theta} = mg\mu_c \left( -\frac{h_0}{\tan \alpha} - \frac{h}{\tan \theta} \right)$$

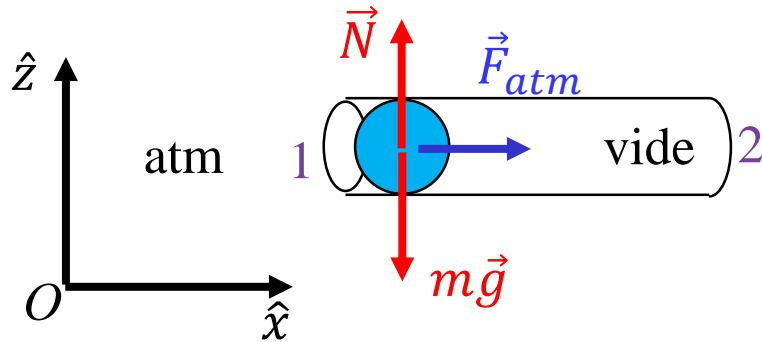
$$\Rightarrow h \left( 1 + \frac{\mu_c}{\tan \theta} \right) = h_0 \left( 1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha} \right)$$

$$h = h_0 \left( 1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha} \right) / \left( 1 + \frac{\mu_c}{\tan \theta} \right)$$



## 4.5 Ex.: canon à vide

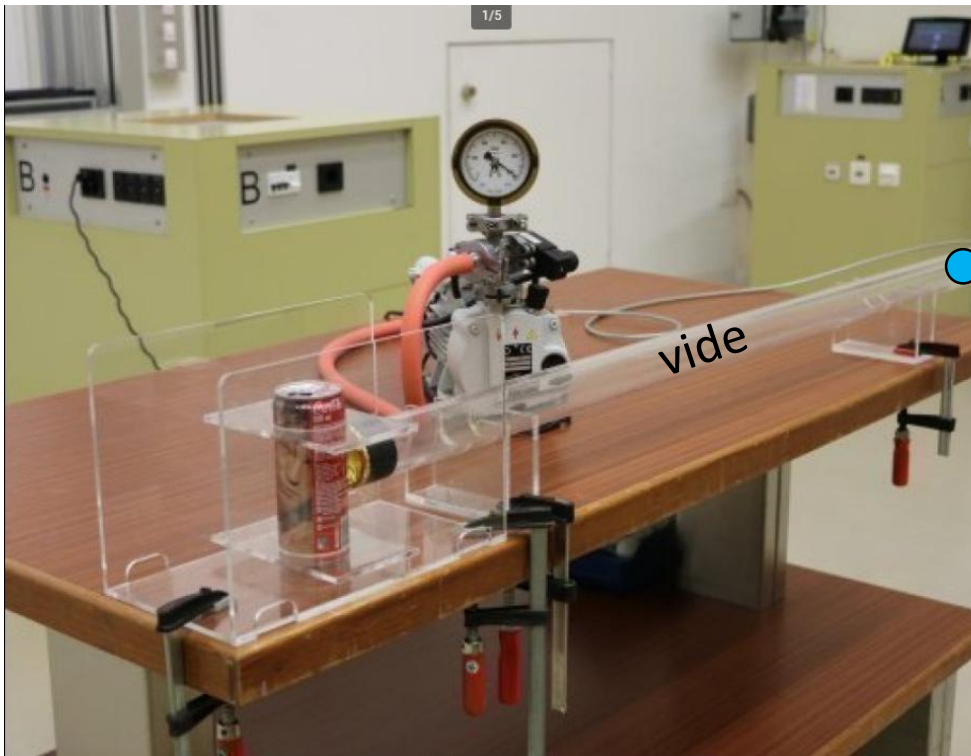
Demo: canon à vide <https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/609>



Cylindre de rayon  $R$  et longueur  $L$ .  
Une balle de ping pong à l'extrémité (1) et accélérée par la pression atmosphérique vers l'extrémité (2)

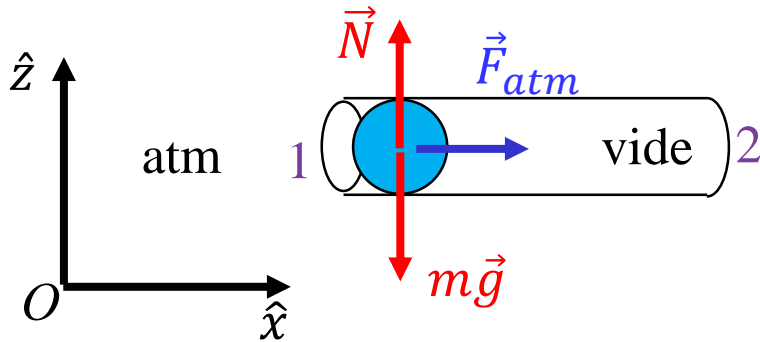
Que se passe-t-il entre la canette et la balle de ping pong?

- 1) La balle rebondit avec la canette presque indéformée
- 2) La balle déforme la canette et les deux se collent l'une à l'autre.
- 3) La canette est coupée en deux



# 4.5 Ex.: canon à vide

Demo: canon à vide <https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/609>



Cylindre de rayon  $R$  et longueur  $L$ .  
Une balle de ping pong à l'extrémité (1) et accélérée par la pression atmosphérique vers l'extrémité (2)

Mouvement selon  $\hat{x}$   $\Rightarrow$   $\vec{N}$  et  $m\vec{g}$  ne travaillent pas (perpendiculaires au déplacement)

$$\vec{F}_{atm} = \pi R^2 P_{atm} \hat{x} \quad W_{atm} = \int_1^2 \vec{F}_{atm} \cdot d\vec{r} = \pi R^2 P_{atm} L$$

Théorème de l'énergie cinétique:

$$W_{atm} = \pi R^2 P_{atm} L = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m v^2 - 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\pi R^2 P_{atm} L}{m}}$$

$$\begin{aligned} P_{atm} &= 10^5 \text{ Pa,} \\ R &= 2 \cdot 10^{-2} \text{ m,} \\ L &= 2 \text{ m,} \\ m &= 3 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v \sim 400 \text{ m/s} \sim 1400 \text{ Km/h}$$

Effet identique à une masse  $M$  qui tombe d'une hauteur  $h = 1 \text{ m}$

$$\frac{1}{2} m v^2 = M g h \quad \Rightarrow \quad M = \frac{m v^2}{2 g h} \sim 24 \text{ Kg}$$

On transforme l'énergie cinétique (balle de ping pong) ou potentiel (masse  $M$  qui tombe) en déformation de la canette

## 4.5 L'énergie mécanique: intégrale première

Pourquoi on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour résoudre des problèmes de dynamique?

Si  $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})$  est une constante, alors, par dérivation :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}) \right) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{dV(\vec{r})}{dt} \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} + \left( \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla}V(\vec{r}) \cdot \vec{v} = \left( m\vec{a} - \vec{F} \right) \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \end{aligned}$$

- On dit que l'énergie mécanique, si elle est conservée, est une **intégrale première** des équations du mouvement (équivalente à la loi de Newton mais seules les dérivées premières interviennent)
- On verra que, de manière générale :
  - les constantes du mouvement sont des intégrales premières
  - les lois de conservation donnent des équations différentielles faisant apparaître les dérivées premières des variables définissant la position (plutôt que les dérivées secondes comme dans la 2ème loi de Newton)  $\Rightarrow$  solutions des problèmes (souvent) plus facile que résoudre  $\vec{F} = m\vec{a}$

# 4.5 Energie mécanique d'un oscillateur harmonique

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2}kx^2 \right)$$

2<sup>ème</sup> loi de Newton  
équivalente à conservation  
énergie mécanique

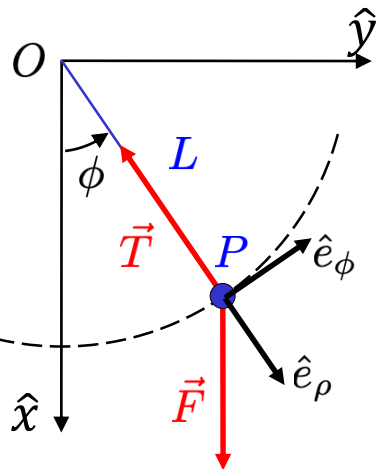
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

énergie cinétique + énergie potentielle = énergie mécanique totale

# 4.5 Energie mécanique d'un pendule

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi \Rightarrow \ddot{\phi}\dot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi \dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{g}{L} \cos \phi \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{L} \cos \phi \text{ est une constante (intégrale première)}$$



Donc: 
$$\underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2}_{\frac{1}{2}mv^2} - \underbrace{mgL \cos \phi}_{+mg(-x)} = \text{constante}$$

énergie cinétique + énergie potentielle = énergie mécanique totale

énergie potentielle  
dans le champ de  
pesanteur =  $mg \times h$

$L^2\dot{\phi}^2 = L^2\omega^2 = v^2$  mouvement circulaire de rayon  $L$

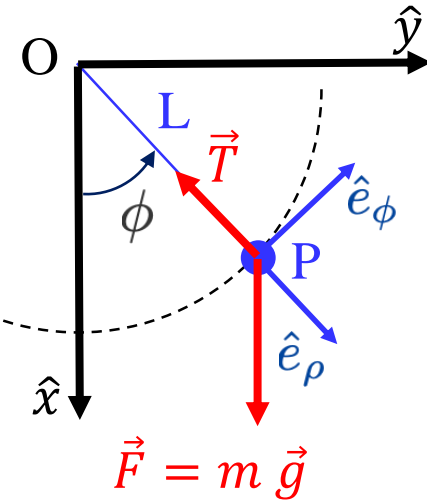
# Ex: valeur tension corde pendule

<https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/701>



2eme loi de Newton:

$$\begin{cases} -T + m g \cos \phi = -mL\dot{\phi}^2 \\ -m g \sin \phi = mL\ddot{\phi} \end{cases}$$



$\vec{T}$  ne travaille pas (perpendiculaire au déplacement)  
donc pour le théorème de l'énergie l'énergie  
mécanique est conservée

$$\frac{1}{2} mL^2 \dot{\phi}^2 - mgL \cos \phi = cste = -mgL \cos \phi_0$$



$$mL^2 \dot{\phi}^2 = 2mgL \cos \phi - 2mgL \cos \phi_0$$

$$-T + m g \cos \phi = -mL\dot{\phi}^2 = -(2mg \cos \phi - 2mg \cos \phi_0)$$

$$T = 3mg \cos \phi - 2mg \cos \phi_0$$

La norme de  $|\vec{T}|$  oscille entre  $T_{min} = mg \cos \phi_0$  et  $T_{max} = 3mg - 2mg \cos \phi_0$

# 4.6 Forces conservatives: équilibre et petites oscillations

Forces conservatives  $\Rightarrow$

énergie potentielle permet de discuter le mouvement, en particulier la stabilité des points d'équilibre

- Situation abstraite:

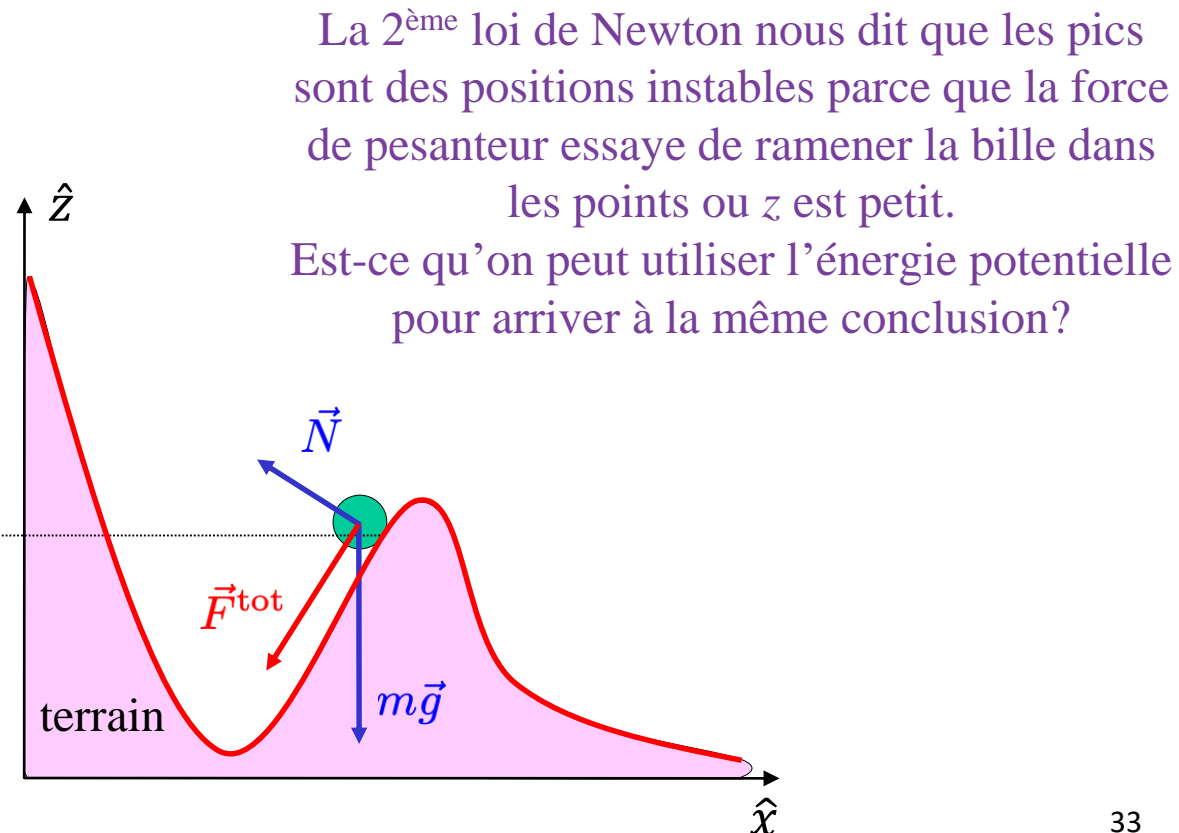
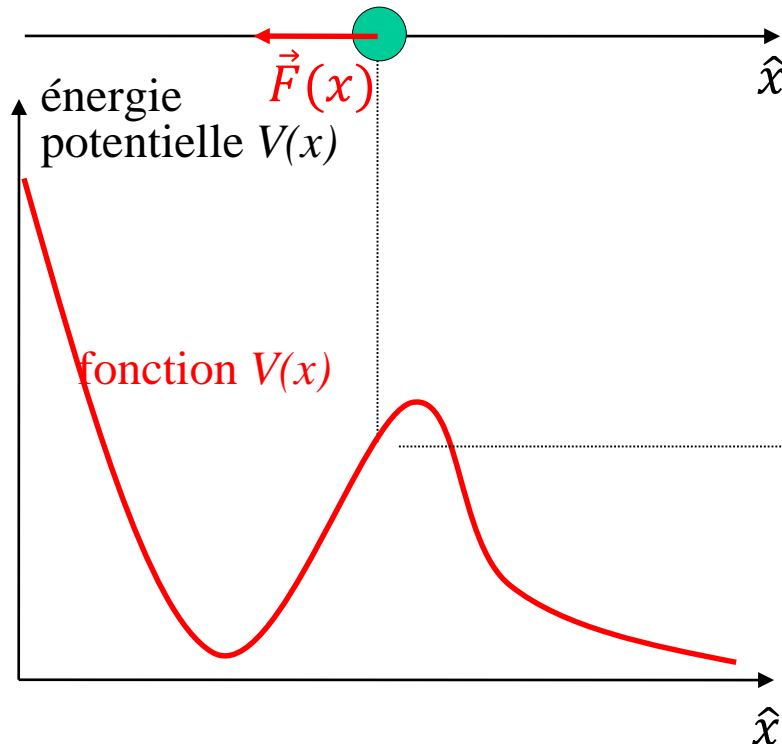
Point matériel se déplaçant sur un axe  $x$  et soumis à une force conservative

$$\vec{F}(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \hat{x}$$

- Exemple pratique:

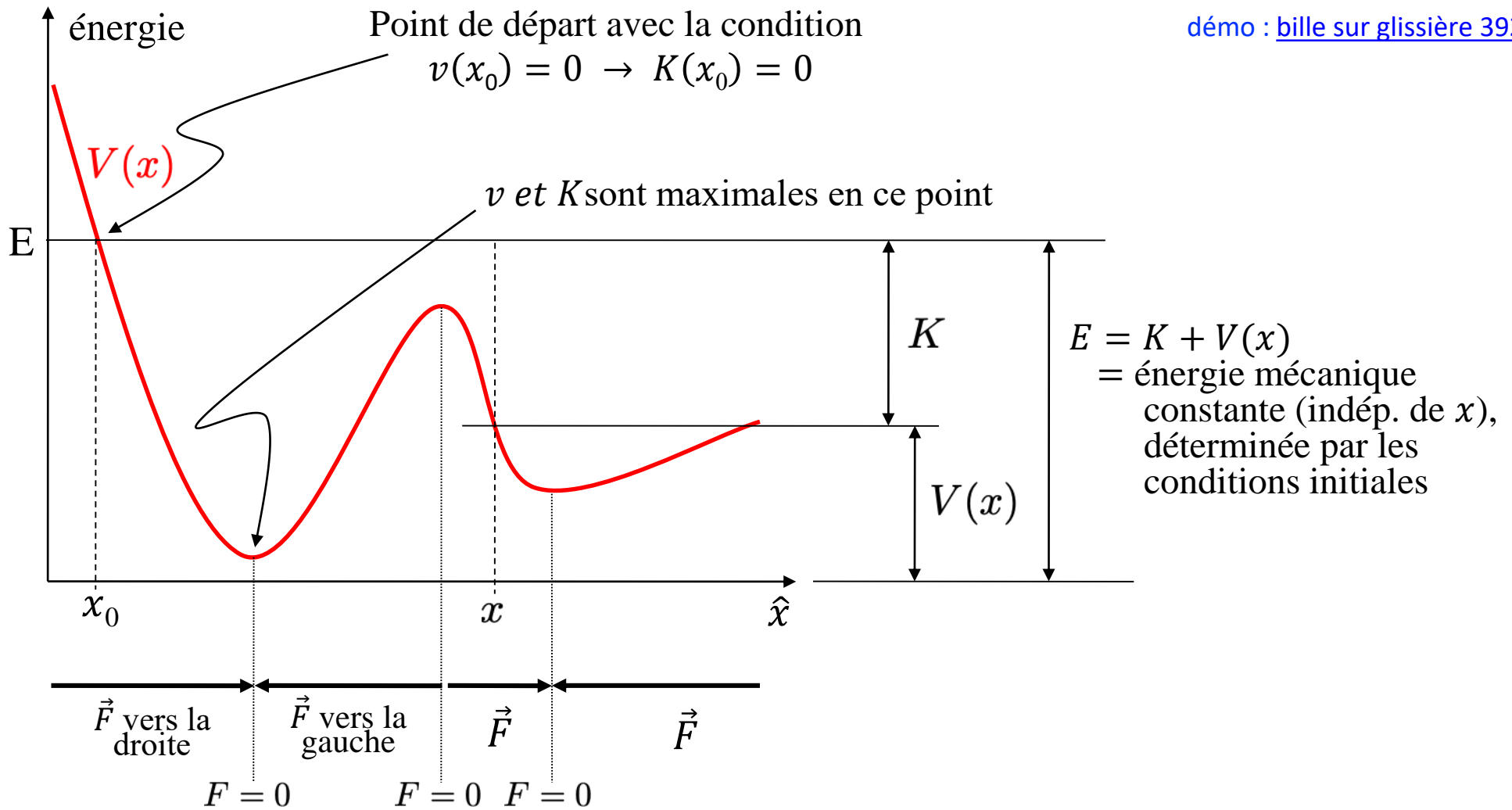
Bille soumise à son poids et contrainte à se déplacer (sans frottement) sur un relief.

Dans ce cas,  $V(x) = mgz(x)$



# 4.6 Mouvement rectiligne dans un potentiel: discussion qualitative

démo : [bille sur glissière 392](#)



**Force  $F = -\frac{dV(x)}{dx} V(x) = -\text{pente de la courbe} \Rightarrow$**

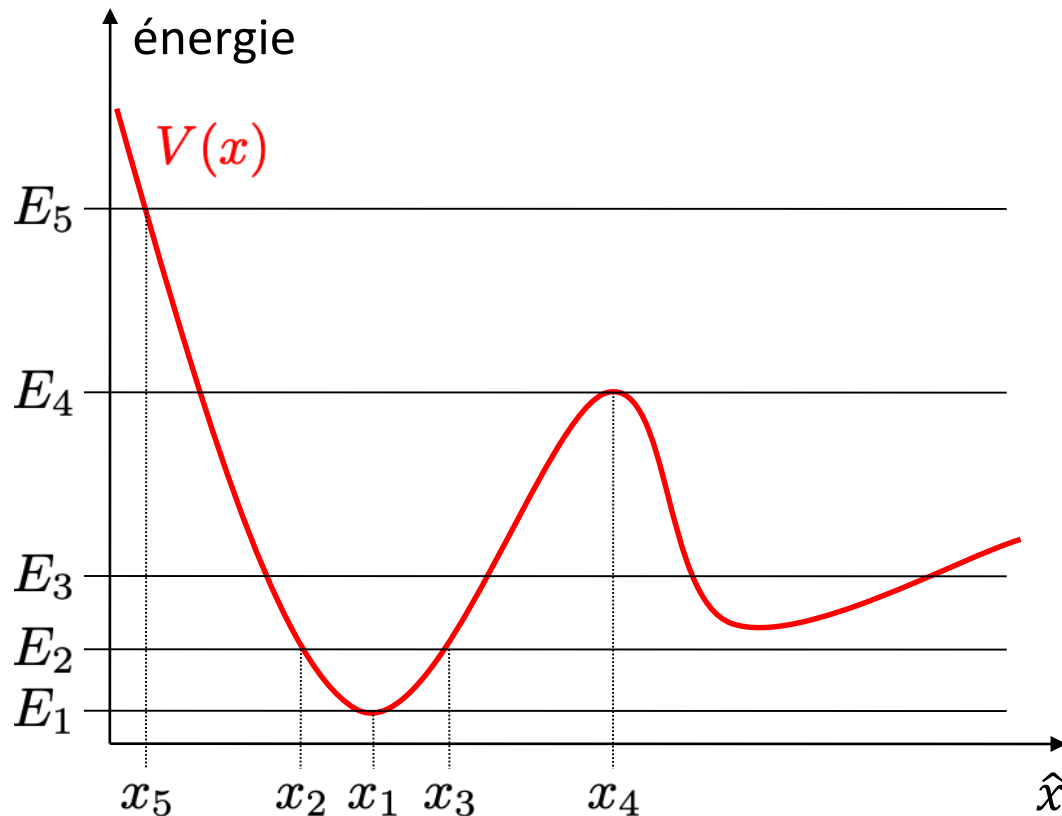
**$F = 0$  aux extrema de la fonction  $V(x)$**

# 4.6 Mouvement rectiligne dans un potentiel: discussion qualitative (suite)

Condition :

$$K = E - V(x) \geq 0 \Rightarrow E \geq V(x)$$

$\Rightarrow$  les positions  $x$  telles que  
 $V(x) > E$  sont inaccessibles



Cas particuliers :

- Si  $E = E_1$  :  
 $x = x_1$  constante;  
 $x_1 =$  point d'équilibre ( $F = 0, v = 0$ )
- Si  $E = E_2$  :  
oscillations entre  $x_2$  et  $x_3$ ;  
 $x_2, x_3$  : points d'arrêt ( $v = 0$ )  
 $\vec{F}(x_2) = - \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x_2} \hat{x} = - \vec{F}(x_3)$ : la force  $\vec{F}(x)$   
tend à ramener vers  $x_1$
- Si  $E = E_3$  :  
deux plages en  $x$  permises, séparées par  
une « barrière de potentiel »
- Si  $E = E_4$  :  
position d'équilibre instable en  $x = x_4$   
( $F = 0, v = 0$ ); la force  $\vec{F}(x)$  tend à éloigner  
de  $x_4$
- Si  $E = E_5$  :  
 $x > x_5$  ; le point matériel part à l'infini

## 4.6 Equilibre et petites oscillations

$$F(x_0) = 0 \Rightarrow -\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0 \text{ est un point d'équilibre}$$

1) L'étude de l'énergie potentielle  $V(x)$  (ou de la force  $\vec{F}(x)$ ) permet de déterminer les points d'équilibre, ainsi que les fréquences des petites oscillations autour des points d'équilibre stables

2) Développement limité autour d'un point d'équilibre  $x_0$  (pour  $x$  proche de  $x_0$ ):

la fonction  $V(x)$  est approximée par une parabole (développement au deuxième ordre)

$$V(x) = V(x_0) + \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots =$$

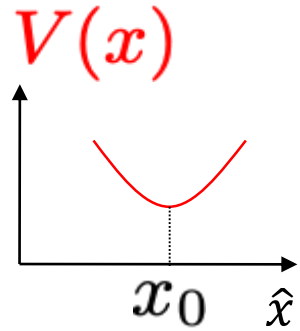
$$V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \cong V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -V'(x) = -V''(x_0)(x - x_0)$$

On reconnaît la force et l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique de raideur  $k = V''(x_0)$

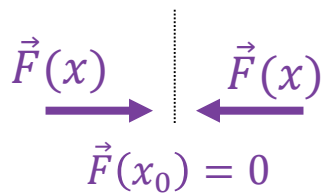
$$V'(x) = V'(x_0) + V''(x_0)(x - x_0) \cong V''(x_0)(x - x_0)$$

# 4.6 Equilibre et petites oscillations



$$V''(x_0) > 0$$

$$F(x) = -V''(x_0)(x - x_0)$$



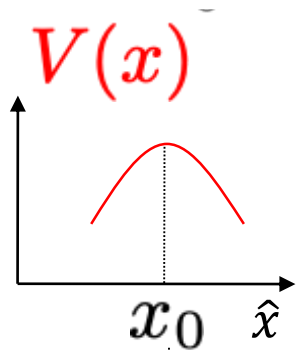
$$x > x_0 \rightarrow x - x_0 > 0 \rightarrow F(x) < 0$$

$$x < x_0 \rightarrow x - x_0 < 0 \rightarrow F(x) > 0$$

$V''(x_0) > 0 \Rightarrow$  Equilibre stable, garanti par une force de rappel:

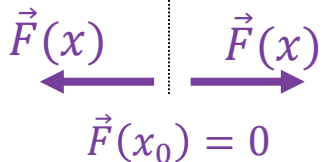
Le mouvement correspond à des petites oscillations autour du point d'équilibre de

$$\text{pulsation } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$$



$$V''(x_0) < 0$$

$$F(x) = -V''(x_0)(x - x_0)$$



$$x > x_0 \rightarrow x - x_0 > 0 \rightarrow F(x) > 0$$

$$x < x_0 \rightarrow x - x_0 < 0 \rightarrow F(x) < 0$$

$V''(x_0) < 0 \Rightarrow$  Equilibre instable:

La force éloigne le point matériel de la position d'équilibre dès que  $x \neq x_0$

Le signe de  $V''(x_0)$ , où  $x = x_0$  est un point d'équilibre, définit la stabilité autour de  $x_0$

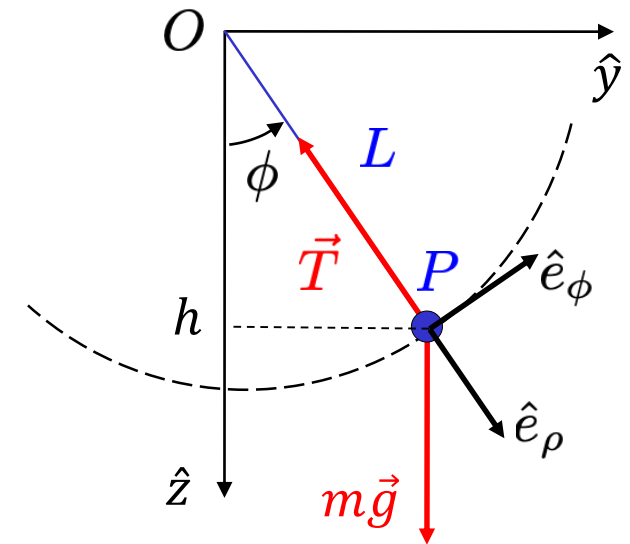
## 4.6 Ex.: pendule rigide

- Point matériel attaché à une tige rigide sans masse de longueur  $L$ , soumis à son poids  $m\vec{g}$  et restant dans un plan vertical :

$\vec{T}$  ne travaille pas car perpendiculaire au déplacement;

la force de pesanteur  $m\vec{g}$  est conservative

Energie potentielle de  $m\vec{g}$  :  $V = -mgh = -mgL \cos \phi$



- Recherche des positions d'équilibre :

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = mgL \sin \phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \phi_0 = \pi \end{cases}$$

- Stabilité des point d'équilibre:

$$\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = mgL \cos \phi \Rightarrow \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_0} = \begin{cases} mgL > 0 & \text{si } \phi_0 = 0 & \text{Equilibre stable} \\ -mgL < 0 & \text{si } \phi_0 = \pi & \text{Equilibre instable} \end{cases}$$

# 4.6 Ex.: pendule rigide

- Pour calculer la force autour du point d'équilibre il faut se rappeler que :

$$\int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}) = -V(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

avec  $\vec{r}$  coordonnée de déplacement (longueur)

- Coordonnée curviligne:  $s = L\phi \Rightarrow$

$$V(s) = -mgL \cos \phi(s) = -mgL \cos \frac{s}{L}$$

- Force:  $F(s) = -V''(s_0)(s - s_0)$

- Pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable

$$(s_0 = 0 \Leftrightarrow \phi_0 = 0) : \omega = \sqrt{\frac{V''(s_0)}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Même résultat obtenu en appliquant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton

$$V'(s) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial s} = V'(\phi) \frac{1}{L}$$

$$V''(s) = \frac{\partial V'(s)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial s} = V''(\phi) \frac{1}{L^2} \quad \Rightarrow \quad V''(s_0) = \frac{1}{L^2} V''(\phi_0) = \frac{1}{L^2} mgL = \frac{mg}{L}$$

